数理解析研究所講究録 1342 巻 2003 年 40-52

THETA LIFTING OF NEARLY HOLOMORPHIC MODULAR FORM

京都大学 総合人間学部　西山 享 (Kyo NISHIYAMA)

FACULTY OF IHS, KYOTO UNIVERSITY
SAKYO, KYOTO 606-8501, JAPAN

1990 年代に Borcherds によって、複素上半平面上の nearly holomorphic な保型形式を IV 型対称領域上の有理型保型関数に持ち上げる手法が開発された。初期の論文 [1] では generalized Kac-Moody 代数の分母公式として、無限積によって保型関数を与えたが、のちに Harvey-Moore の着想を機に、theta 積分を用いた、より理解しやすい形で同値な構成を行なっている [2]。さらに Bruinier [3] は nearly holomorphic な保型形式を wave form の和に分解し、wave form の theta 積分に帰着することで Borcherds の結果の別証明を与えた。この Bruinier の方法は、保型形式の持ち上げに対する表現論的な考察と一番馴染みやすいように見受けられる。

このノートでは Bruinier の手法に従って Brocherds の主要な結果を紹介する。最初の目論見は、Bruinier の手法を表現論の観点から理解することであったが、筆者の力不足で思ったように行かなかった。表現論に関係した若干の (極めて不十分な) 考察を最後につけ加えておいた。

なお Bruinier [3] の本では、保型的グリーン関数や、それを用いた尖点保型形式の調和 $(1,1)$ 形式への持ち上げなどさらに進んだ内容が考察されているが、このノートでは省いてある。また、主要なアイディアを紹介するという目的から、一番簡単な状況のみを考えている。従って、このノートで述べた定理の主張や定義は、大幅に一般化可能でありしかもしばしば具体性に欠けている。筆者の非力をお許し頂くとともに、興味を持たれた方はぜひ原論文/原著に当ってみられたい。

1. IV 型対称領域の実現

符号 (p,q) の対称双線型形式 $(,)$ が定義された実ベクトル空間 $V=\mathbb{R}^{p,q}$ を考える。その複素化を $V_{\mathbb{C}}$ と書き、双線型形式 $(,)$ を複素線型に拡張しておく。また $\overline{Z}$ で $Z\in V_{\mathbb{C}}$ の V に関する複素共役を表す。

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbb{C}} \supset \mathfrak{N} &= \{Z\in V_{\mathbb{C}} \mid (Z,Z)=0\} : \text{null cone} \\
\supset \mathfrak{K} &= \{Z\in \mathfrak{N} \mid (Z,\overline{Z})>0\} : \ \text{open in } \mathfrak{N}
\end{aligned}
$$

とおく。また混乱の恐れのないときには $X^2=(X,X)$ などと書くことにする。

RIMS 短期共同「IV 型対称領域上の保型形式の研究」(2002/12/24 – 12/26) 講究録原稿.

補題 1.1. $Z = X + \sqrt{-1}Y$ $(X, Y \in V)$ に対して、

$$Z \in \mathfrak{K} \iff (X, Y) = 0 \text{ かつ } X^2 = Y^2 > 0$$

Proof. $(Z, Z) = X^2 - Y^2 + 2\sqrt{-1}(X, Y) = 0$ より $(X, Y) = 0$ かつ $X^2 = Y^2$ である。したがって $(Z, \overline{Z}) = X^2 + Y^2 = 2X^2 > 0$ となる。 □

この補題より、$Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathfrak{K}$ に対して $\{X, Y\}$ で生成された実ベクトル空間 $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} \subset V$ は、2 次元の正定値空間となることがわかる。そこで、

$$Gr_2^+(V) \overset{\mathrm{def}}{:=} (V \text{ の 2 次元正定値部分空間の全体}) : \text{Grassmann 多様体} \tag{1.1}$$

とおくと、次の写像 γ が定義されたことになる。

$$\gamma : \mathfrak{K} \ni Z \longmapsto \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr_2^+(V) \tag{1.2}$$

$\mathbb{P}(\mathfrak{K}) = \mathfrak{K}/\mathbb{C}^\times$ を射影化とすると、$\mathbb{C}^\times = \mathbb{R}_{>0} \times SO(2)$ の作用は X, Y を正の実数倍して回転することに当るから、γ は明らかに $\mathbb{P}(\mathfrak{K})$ を経由する。

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{K} \arrow[d, "\text{proj.}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \mathbb{P}(\mathfrak{K}) \arrow[r, "\varphi"] & Gr_2^+(V) \end{tikzcd}$$

さらに $Z \in \mathfrak{K}$ は、部分空間 $\gamma(Z) = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}}$ の (長さが同じ) 直交基底の組 $\{X, Y\}$ を順序付きで指定していることになるから

$$\varphi : \mathbb{P}(\mathfrak{K}) \ni [Z] \longmapsto v = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr_2^+(V) \tag{1.3}$$

は 2 : 1 の被覆写像となる。ここで $\varphi^{-1}(v) = \{[Z], [\overline{Z}]\}$ は、それぞれ右手系と左手系の直交基底を表している。

<u>$p \geq 3$ のとき</u> $\mathbb{R}^3$ 内の平面を考えると、その右手系と左手系は互いに $SO(3)$ の作用で移りあうから、$\mathbb{P}(\mathfrak{K})$ は連結であって、$O(p, q)$ が推移的に働く ($\because$ Witt の定理)。さらに、一点 $[Z] \in \mathbb{P}(\mathfrak{K})$ の固定部分群は $SO(2) \times O(p-2, q)$ と同型であるから、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathfrak{K}) \arrow[d, "\varphi"'] & O(p,q)/SO(2) \times O(p-2,q) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\text{proj.}"] \\ Gr_2^+(V) & O(p,q)/O(2) \times O(p-2,q) \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

となることがわかる。

<u>$p = 2$ のとき</u> (IV 型領域の場合) $\mathbb{P}(\mathfrak{K})$ は連結でなく、右手系と左手系の連結成分に分解する。それを

$$\mathbb{P}(\mathfrak{K}) = \mathbb{P}(\mathfrak{K}^+) \sqcup \mathbb{P}(\mathfrak{K}^-)$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(\mathfrak{K}^+) & \simeq & \mathbb{P}(\mathfrak{K}^-) & \xrightarrow[\varphi]{\sim} & Gr_2^+(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ [Z] & \leftrightarrow & [\overline{Z}] & \longleftrightarrow & v = \langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} \end{array} \tag{1.4}$$

となることがわかるので、結局

$$\mathbb{P}(\mathfrak{K}^+) \simeq \mathbb{P}(\mathfrak{K}^-) \simeq Gr_2^+(V) \simeq SO_0(2,q)/SO(2) \times SO(q)$$

が IV 型対称領域の実現を与えている。

Remark 1.2. $O(2,q)$ は自然に $Gr_2^+(V)$ に作用し、

$$Gr_2^+(V) \simeq O(2,q)/O(2) \times O(q) \simeq SO_0(2,q)/SO(2) \times SO(q)$$

である。しかし、$O(2,q)$ は $\mathfrak{K}^\pm$ を保存しない。以下、$O^+(2,q)$ で $\mathfrak{K}^+$ を安定にする $O(2,q)$ の指数 2 の部分群を表す (連結ではなく、連結成分は二個ある)。

2. IV 型対称領域の管状領域としての実現

以下 Bruinier [3] の記号にしたがって、

$$G = O(2,l) \qquad (l \geq 3) \tag{2.1}$$

を考えることにする。

$L \subset V = \mathbb{R}^{2,l}$ を even, unimodular な格子とし、

$$L = K \oplus H \qquad \begin{cases} \exists K: \text{ 符号数 } (1, l-1) \text{ の unimodular な格子} \\ \exists H: \text{ 符号数 } (1,1) \text{ の放物型格子} \end{cases} \tag{2.2}$$

と書けていると仮定する。[3] では、このような仮定はまったく必要なく、一般の格子 L について以下の議論が展開されていることに注意する。理論的にも、応用面でも一般の格子を扱うことが重要であるが、このノートでは理論の大筋を理解するという目的のため、上のような仮定をおいた。[3] でも Introduction では unimodular が仮定されているが、このような仮定をすることで記述面でも議論の詳細においても大幅な簡約化ができる。

さて、$z, z' \in H$ を原始的な等方ベクトルで $(z, z') = 1$ を満たすものとする。このとき

$$\begin{array}{rcl} V & = & K_{\mathbb{R}} \oplus H_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}z' \oplus \mathbb{R}z \\ \Downarrow & & \\ Z & = & W + az' + bz \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ W \in K_{\mathbb{R}}) \end{array} \tag{2.3}$$

のように座標を入れておく ($K_{\mathbb{R}} = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}, H_{\mathbb{R}} = H \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$)。

補題 2.1. $K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ の (一般化された) 上半平面を

$$\widetilde{\mathbb{H}_l} = \{W = X + \sqrt{-1}Y \in K_{\mathbb{C}} \mid Y^2 > 0\}$$

と定義する。写像

$$\nu : \widetilde{\mathbb{H}_l} \ni W \longmapsto W + z' - \frac{W^2}{2} z \in \mathfrak{K} \tag{2.4}$$

を用いて $\mathbb{H}_l^{\pm} :\stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu^{-1}(\mathfrak{K}^{\pm})$ と定義すれば、$\widetilde{\mathbb{H}_l} = \mathbb{H}_l^+ \sqcup \mathbb{H}_l^-$ は連結成分への分解であって、さらに

$$\mathbb{H}_l^+ \xrightarrow[\mathrm{proj.}\circ\nu]{\sim} \mathbb{P}(\mathfrak{K}^+) \xrightarrow[\varphi]{\sim} Gr_2^+(V) \simeq SO_0(2,l)/SO(2) \times SO(l) \tag{2.5}$$

は双正則同型を与える。以下 $\mathbb{H}_l = \mathbb{H}_l^+$ と書く。

Remark 2.2. $\mathbb{H}_l = \mathbb{H}_l^+$ と $\mathbb{P}(\mathfrak{K}^+)$ には自然な複素構造が入っており、複素多様体である。上の補題はこれらが複素多様体として同型であることを主張している。一方 $Gr_2^+(V) \simeq SO_0(2,l)/SO(2) \times SO(l)$ には一見して明らかな複素構造は入っていないが、$\mathbb{P}(\mathfrak{K}^+)$ との同型を通して複素構造を入れる。これによって、IV 型対称領域の複素構造と管状領域 $\mathbb{H}_l$ としての実現が具体的に与えられたことになる。

$O^+(2,l)$ は $\mathbb{H}_l$ に分数変換 (の一般化) として働き、その作用はもちろん正則になる。

Proof. まず $\nu : \widetilde{\mathbb{H}_l} \to \mathfrak{K}$ が well-defined であることは、形式的な計算で確かめることができる。実際、$q(W) = W^2/2$ と書くと、

$$\begin{aligned}
&(\nu(W), \nu(W)) = W^2 - W^2(z', z) = 0 \quad \therefore\ \nu(W) \in \mathfrak{N} \\
&(\nu(W), \overline{\nu(W)}) = (W + z' - q(W)z, \overline{W} + z' - \overline{q(W)}z) \\
&\qquad = (W, \overline{W}) - (q(W) + \overline{q(W)})
\end{aligned}$$

であるが、$W = X + \sqrt{-1}\,Y$ $(Y^2 > 0)$ と書いておくと、

$$2q(W) = W^2 = X^2 - Y^2 + 2\sqrt{-1}\,(X, Y) \quad \therefore \begin{cases} q(W) + \overline{q(W)} = X^2 - Y^2 \\ (W, \overline{W}) = X^2 + Y^2 \end{cases}$$

$$(\nu(W), \overline{\nu(W)}) = (X^2 + Y^2) - (X^2 - Y^2) = 2Y^2 > 0 \quad \therefore\ \nu(W) \in \mathfrak{K}$$

$\mathrm{proj.} \circ \nu : \mathbb{H}_l \xrightarrow{\nu} \mathfrak{K}^+ \xrightarrow{\mathrm{proj.}} \mathbb{P}(\mathfrak{K}^+)$ が双正則な同型写像であることは、その形からほぼ明らかだろう。 □

3. Heegner divisor

以下、$(,)$ の定める二次形式を $q(x) = (x, x)/2$ で表す。

$\lambda \in L$ を $q(\lambda) = (\lambda, \lambda)/2 < 0$ となるように選ぶ。このとき $\mathbb{P}(\mathfrak{K}^+)$ における λ による超平面切断を $\lambda^{\perp}$ と書き、さらに同型 $\mathbb{H}_l \simeq \mathbb{P}(\mathfrak{K}^+)$ を通じて対応する $\mathbb{H}_l$ における超曲面も記号の濫用で $\lambda^{\perp}$ と表すことにする。$\lambda = \lambda_K + az' + bz$ $(\lambda_K \in K)$ と表しておくと $\mathbb{H}_l$ においては

$$\lambda^{\perp} = \{W \in \mathbb{H}_l \mid aq(W) - (W, \lambda_K) = b\} : \ 2\text{次曲面} \tag{3.1}$$

である。$\lambda^\perp \simeq O(2,l-1)/O(2)\times O(l-1)$ だから、これ自身また IV 型の対称領域になる。したがって $q(\lambda)<0$ に対して $\lambda^\perp$ を考えることは、IV 型対称領域 $O(2,l)/O(2)\times O(l)$ への $O(2,l-1)$ の埋め込みによる因子 (divisor) を考えることでもある。

定義 3.1. $m\in\mathbb{Z}_{<0}$ に対して

$$H(m) \overset{\mathrm{def}}{:=} \sum_{\lambda\in L,\ q(\lambda)=m} \lambda^\perp \tag{3.2}$$

とおき、これを判別式 (discriminant) が m の Heegner 因子と呼ぶ。

離散部分群 $\Gamma(L)$ と、それによる商空間を

$$\Gamma(L)=\{g\in O^+(2,l)\mid g\cdot L=L\},\qquad \mathfrak{X}_L=\Gamma(L)\backslash\mathbb{H}_l \tag{3.3}$$

で定義すると、$H(m)$ は $\Gamma(L)$ 不変であって、商写像 $\mathbb{H}_l\to\mathfrak{X}_L=\Gamma(L)\backslash\mathbb{H}_l$ による $\mathfrak{X}_L$ の代数的因子 (algebraic divisor) のひき戻しである。[1]

4. Borcherds 積

$\mathfrak{H}=\{\tau\in\mathbb{C}\mid \operatorname{Im}\tau>0\}$ を複素上半平面とする。

定義 4.1. $\mathfrak{H}$ 上の正則関数 $f(\tau)$ がウェイト k の nearly holomorphic な保型形式であるとは、ウェイト k の保型形式であって、cusp で高々極を持つときにいう。つまり

$$f(\gamma\cdot\tau)=j(\gamma,\tau)^k f(\tau),\qquad j(\gamma,\tau)=c\tau+d,\quad \gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$$

であって、$q=e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ についての Fourier 展開が次を満す。

$$f(\tau)=\sum\nolimits_{n\gg-\infty} c(n)q^n$$

このとき $\sum_{n<0}c(n)q^n$ を f の主要部と呼ぶ。

以下次の仮定をする。

仮定 4.2. nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ のウェイトは $k=1-l/2\in\mathbb{Z}_{<0}$ であって、さらにその主要部の Fourier 係数について $c(n)\in\mathbb{Z}$ $(n<0)$ が成り立つ。

特に、l は以下偶数と仮定されることに注意されたい[2]。また、偶数 $l>3$ に対して上の仮定を満し、自明でない主要部を持つ nearly holomorphic な保型形式が存在するので、上の仮定は無意味ではない。

---

[1] 佐武-Baily-Borel のコンパクト化 $\overline{\mathfrak{X}_L}$ は射影代数多様体の構造を持つことが分かっているので、$\mathfrak{X}_L$ は quasi-projective variety である。また $\#\{\lambda\in L\mid q(\lambda)=m\}/\Gamma(L)<\infty$ であるから、$\Gamma(L)\backslash H(m)$ は代数的な因子となる。

[2] l が奇数のときには $SL_2(\mathbb{R})$ のメタプレクティック被覆が必要となるので、簡便のために l を偶数とし

$W \in \mathbb{H}_l$ に対して、$\nu(W) = W + z' - q(W)z \in \mathfrak{K}^+$ と決めたのであった。このとき、$\gamma \in O^+(2,l)$ に対して

$$\gamma \nu(W) = j(\gamma, W)\,\nu(\gamma \cdot W) \qquad (\exists\, j(\gamma, W) \in \mathbb{C}^\times) \tag{4.1}$$

が成り立つ。ただし、$\gamma \cdot W$ は $\mathbb{H}_l$ 上の分数変換を表している。$j(\gamma, W)$ はコサイクル条件

$$j(\gamma_1\gamma_2, W) = j(\gamma_1, \gamma_2 \cdot W)j(\gamma_2, W)$$

を満す保型因子である。一般に $r \in \mathbb{Q}$ に対し、$\chi : \Gamma(L) \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を適当に選んで $\chi(\gamma)j(\gamma, W)^r$ が $\Gamma(L)$ 上のコサイクルになるようにできるとき、この χ をウェイト r の乗法因子と呼ぶ。

定義 4.3. $\mathbb{H}_l$ 上の (有理型) 関数 $F(Z)$ が、$\Gamma(L)$ の作用に関して、ウェイト r, 乗法因子が χ の (有理型) 保型形式であるとは、

$$F(\gamma Z) = \chi(\gamma)j(\gamma, Z)^r F(Z) \qquad (\gamma \in \Gamma(L), Z \in \mathbb{H}_l) \tag{4.2}$$

が成り立つときにいう。

定理 4.4 (Borcherds [1, 2]). f を仮定 4.2 を満す nearly holomorphic な保型形式、$c(n)$ をその Fourier 係数とする。このとき、

$$\begin{cases} W_f \overset{\text{open}}{\subset} K_{\mathbb{R}} & : \text{Weyl chamber} \\ \rho_f \in K_{\mathbb{R}} & : \text{Weyl vector} \end{cases}$$

が存在して、無限積

$$\Psi_f(Z) :\overset{\text{def}}{=} e^{2\pi\sqrt{-1}(\rho_f, Z)} \prod_{\substack{\lambda \in K \\ (\lambda, W_f) > 0}} (1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(\lambda, Z)})^{c(q(\lambda))} \qquad (Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathbb{H}_l) \tag{4.3}$$

は $q(Y) \gg 0$ で絶対収束し、$\Gamma(L)$ に関してウェイトが $\frac{1}{2}c(0)$, 乗法因子が χ ($|\chi| = 1$) であるような $\mathbb{H}_l$ 上の有理型保型形式を定める。さらに Ψ_f の定める主因子は

$$(\Psi_f) = \sum_{m \in \mathbb{Z},\, m < 0} c(m)H(m) \tag{4.4}$$

と Heegner 因子の線型結合で与えられる。

Remark 4.5. (1) $c(0) \in 2\mathbb{Z}$ ならば、$\chi = 1$ である。

(2) $K_{\mathbb{R}}$ 内の正定値な一次元ベクトル空間のなす Grassmann 多様体を $Gr(K) = \{v \in \mathbb{P}(K_{\mathbb{R}}) \mid v = \mathbb{R}u,\ (u, u) > 0\}$ と書く。このとき

$$Gr(K) - \bigcup_{\substack{m<0 \\ c(m) \neq 0}} \bigcup_{\substack{\lambda \in K \\ q(\lambda) = m}} \{v \in Gr(K) \mid v \perp \lambda\} \tag{4.5}$$

の連結成分を Weyl chamber と呼び、W_f で表す。Weyl vector ρ_f は f, W によって決まり、具体的な表示もあるが、定義するだけでかなりの準備が必要があるので省略する。詳しくは [2, Theorem 10.4] を参照されたい。

Borcherds の最初の論文 [1] では、無限積を天下り的に与え、実際それが保型性を持つことを具体的にチェックして証明していた。もちろん、無限積そのものは generalized Kac-Moody Lie 代数の分母公式から触発されて定式化されたものではあるが、証明ではそのようなアプローチは用いられていないようである。

これとは別に、この無限積の対数を取った関数を theta 積分を用いて定式化し、証明することもできる (Harvey-Moore, Borcherds [2])。この方法について説明する。

$\tau = x + \sqrt{-1}\,y \in \mathfrak{H}, Z = X + \sqrt{-1}\,Y \in \mathbb{H}_l$ に対して、theta 関数を

$$\Theta_L(\tau, Z) = \sum_{\lambda \in L} e^{2\pi\sqrt{-1}(\tau q(\lambda_+) + \bar{\tau} q(\lambda_-))} \tag{4.6}$$

と定義する。ただし $\lambda \in V$ に対して、

$$\lambda = \lambda_+ + \lambda_- \in v \oplus v^\perp \qquad \begin{cases} v = \varphi([\nu(Z)]) & : Z \text{ に対応する二次元正定値空間} \\ v^\perp & : v \text{ に直交する負定値空間} \end{cases} \tag{4.7}$$

と書いた。

定義 4.6. $F \subset \mathfrak{H}$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の基本領域、$f(\tau)$ を nearly holomorphic な保型形式とする。このとき

$$\begin{aligned} \Phi_f(Z) &= \int_F f(\tau)\overline{\Theta_L(\tau, Z)} y \frac{dx\,dy}{y^2} \\ &\overset{\text{def}}{:=} \left(\int_F f(\tau)\overline{\Theta_L(\tau, Z)} y^{1+s} \frac{dx\,dy}{y^2} \text{ の } s = 0 \text{ における定数項} \right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

と定義して、これを正規化された theta 積分 (regularized theta integral) と呼ぶ。

この積分は一般には発散積分であるが、それは次のように解釈する。通常のように $F = \{\tau = x + \sqrt{-1}\,y \in \mathfrak{H} \mid |x| \le 1/2, |\tau| \ge 1\}$ とおき、$u > 0$ に対して $F_u = \{\tau \in F \mid y \le u\}$ と書く。上の積分は、広義積分

$$\lim_{u \to \infty} \int_{F_u} f(\tau)\overline{\Theta_L(\tau, Z)} y^{1-s} \frac{dx\,dy}{y^2} \tag{4.9}$$

として定義する。これは $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ で収束し、s について有理型に解析接続されることがわかる ([2, §6])。

定理 4.7 (Harvey-Moore, Kontsevich, Borcherds). $f(\tau)$ をウェイトが $k = 1 - l/2$ の nearly holomorphic な保型形式とする。このとき theta 積分 (4.8) は、Borcherds 無限積 (4.3) の対数を用いて (定数差を除き) 次のように表せる。

$$\log |\Psi_f(Z) q(Y)^{c(0)/4}| = -\frac{1}{4}\Phi_f(Z) + (\text{定数}) \qquad (Z \in \mathbb{H}_l \simeq Gr_2^+(V)).$$

これを表現論的に少し見やすい形に書き換えることを以下の目標にする。

5. MAAS WAVE FORM とその THETA 積分

Whittaker 関数 $M_{\nu,\mu}(z), W_{\nu,\mu}(z)$ を通常のように定義する ([5] 参照)。$M_{\nu,\mu}(z), W_{\nu,\mu}(z)$ は次の微分方程式の解である。

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} - \frac{\mu^2 - 1/4}{z^2}\right) w = 0 \tag{5.1}$$

さらに $\mathcal{M}_s, \mathcal{W}_s$ を

$$\mathcal{M}_s(y) = y^{-k/2} M_{-k/2,s-1/2}(y), \quad \mathcal{W}_s(y) = y^{-k/2} M_{sgn(y)k/2,s-1/2}(y) \qquad (s \in \mathbb{C})$$

と置く。この Whittaker 関数を用いて、$m \in \mathbb{Z}_{<0}, s \in \mathbb{C}$ に対して $F_m(\tau, s)$ ($\tau = x + \sqrt{-1}\, y \in \mathfrak{H}$) を

$$F_m(\tau, s) = \frac{1}{2\Gamma(2s)} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash SL_2(\mathbb{Z})} \left(\mathcal{M}_s(4\pi|m|y) e^{2\pi\sqrt{-1} m x}\right)\Big|_k \gamma \tag{5.2}$$

と Poincaré 級数の形で定義する。この級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ で絶対収束し、$F_m(\tau, s)$ はウェイト $k = 1 - l/2$ を持つ、$\mathfrak{H}$ 上で実解析的な保型関数になる。

補題 5.1. ウェイトが k のラプラシアンを

$$\Delta_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \sqrt{-1}\, ky \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{5.3}$$

で定義すると、

$$\Delta_k F_m(\tau, s) = \left(s(1-s) - \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right) F_m(\tau, s) \tag{5.4}$$

が成り立つ。つまり $F_m(\tau, s)$ は Maas wave form である。

Remark 5.2. ウェイトが k の保型関数 $f(\tau)$ に対して、

$$F(g) = f(g \cdot \sqrt{-1}) j(g, \sqrt{-1})^{-k} \qquad (g \in SL_2(\mathbb{R}))$$

とおくと、$F(g)$ は $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数である。この対応を $A_k : f \longmapsto F$ で表す。さらに $SL_2(\mathbb{R})$ の Casimir 作用素 Δ_{SL_2} を

$$-2\Delta_{SL_2} = \frac{1}{2} H^2 + EF + FE, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

で定めると、

$$A_k \left(\left(\Delta_k + \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right) f\right) = \Delta_{SL_2} F \tag{5.6}$$

となることがわかる。特に F が主系列表現 $\mathrm{Ind}_P^G(e^{s\alpha} \otimes 1_N)$ と同じ無限小指標を持っていれば $\Delta_{SL_2} F = s(1-s)F$ であるから、

$$\Delta_k f = \left(s(1-s) - \frac{k}{2}\left(1 - \frac{k}{2}\right)\right) f$$

が成り立つ。要するに、(5.4) 式は表現論の観点から見れば $F_m(\tau,s)$ の無限小指標を指定していることになる。

さて、Bruinier のアイディアは、nearly holomorphic な保型形式を wave form で展開しておいて、theta 積分は wave form $F_m(\tau,s)$ に対して計算するというものである。$F_m(\tau,s)$ の theta 積分は、超幾何関数を用いて級数に展開できるので、ある意味で計算可能である。

$Z\in\mathbb{H}_l$ および $\mathrm{Re}\,s>1$ に対して

$$\Phi_m(Z,s):\overset{\mathrm{def}}{=}\int_F F_m(\tau,s)\overline{\Theta_L(\tau,Z)}\,y\frac{dx\,dy}{y^2} \tag{5.7}$$

とおく (正規化された theta 積分)。$\Phi_m(\tau,s)$ は $\mathrm{Re}\,s>1$ で有理型、$s=1-k/2=(2+l)/4$ において一位の極を持つ。そこで

$$\Phi_m(Z)=(\Phi_m(Z,s)\text{ の }s=1-k/2\text{ における}\textbf{定数項}) \tag{5.8}$$

と定義する。ここで、定数項ではなく留数を取るとそれは定数関数になってしまう ([3, Proposition 2.8])。そのようなわけで、非自明な係数のうち最初のものを取って正規化した theta 積分を定義するのであろうと思われる。

命題 5.3. $\Phi_m(Z)$ は $\mathbb{H}_l\setminus H(m)$ 上の実解析的な関数で、因子 $H(m)$ に沿って対数特異点 (log-singularity) を持つ。また、Ω を $O(2,l)$ の Casimir 作用素とすれば、

$$\Omega\Phi_m(Z)=\frac{l}{4}b_m(0)\quad:\text{定数} \tag{5.9}$$

が成り立つ (Ω の具体形については [3, p. 96, (4.1) 式] 参照)。ただし $b_m(0)$ は $F_m(\tau,1-k/2)$ を Fourier 展開したときの定数項であり (下記参照)、一般化された Kloosterman 和として書き下すことができる。

一般に

$$\begin{aligned}F_m(\tau,s)=&\frac{\Gamma(1+k/2-s)}{\Gamma(2-2s)\Gamma(s+k/2)}\mathcal{M}_{1-s}(4\pi|m|y)e^{2\pi\sqrt{-1}mx}\\&+b_m(s,0)y^{1-s-k/2}+\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq0}b_m(n,s)\mathcal{W}_s(4\pi ny)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}\end{aligned}$$

という標記を持つが ([3, Theorem 1.9])、特に $s=1-k/2$ のとき、これは

$$F_m(\tau,1-k/2)=e^{2\pi\sqrt{-1}m\tau}+\sum_{n\geq0}b_m(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau}+\sum_{n<0}b_m(n)\mathcal{W}_{1-k/2}(4\pi ny)e^{2\pi\sqrt{-1}nx}$$

という形の Fourier 展開となり、 Fourier 係数 $b_m(n)$ は一般 Kloosterman 和で書ける ([3, Proposition 1.10])。さらに $s=1-k/2$ のときには、$\Delta_k F_m(\tau,1-k/2)=0$、つまり $F_m(\tau,1-k/2)$ はラプラシアン Δ_k に関して調和関数であることにも注意しておく。

次の命題が重要で、nearly holomorphic な保型形式が wave form の有限和として表されることを主張している ([3, Proposition 1.12])。

命題 5.4. $f(\tau)$ を上半平面 $\mathfrak{H}$ 上のウェイト $k = 1 - l/2 < 0$ を持つ nearly holomorphic な保型形式で、その主要部が $\sum_{n<0} c(n)e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$ で与えられているものとする。このとき、$f(\tau)$ は次のように wave form で展開できる。

$$f(\tau) = \sum_{m<0} c(m)F_m(\tau, 1 - k/2) \tag{5.10}$$

そこで nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ の (正規化された) theta 積分を、wave form の theta 積分を利用して、

$$\Phi_f(Z) = \sum_{m<0} c(m)\Phi_m(Z) \qquad (Z \in \mathbb{H}_l) \tag{5.11}$$

と表すことができる。また、Φ_f が Heegner 因子 $H(m)$ ($c(m) \neq 0$) に沿って対数特異点を持つこと、したがって、$\Psi_f(Z)$ の因子が $\sum_{m<0} c(m)H(m)$ となること (定理 4.4, 4.7 参照) などもこの式からわかる。

6. NEARLY HOLOMORPHIC な保型形式

nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ の主要部を任意に与えることはできない。実際 $\kappa = 1 + l/2 = 2 - k$ として、

$$S_\kappa = (\text{ウェイトが } \kappa \text{ の尖点保型形式の空間})$$

とおくと次が成り立つ。

定理 6.1. ウェイトが $k = 1 - l/2$ の nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ であって、その主要部が

$$\sum\nolimits_{m<0} c(m)e^{2\pi\sqrt{-1}m\tau}$$

で与えられるものが存在するための必要十分条件は、任意の尖点保型形式

$$\varphi(\tau) = \sum\nolimits_{n>0} a(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau} \in S_\kappa$$

に対して、

$$\sum\nolimits_{m<0} c(m)a(-m) = 0$$

が成り立つことである。

S_κ の元 $\varphi(\tau)$ に対して、$\varphi(\tau)$ の第 n 番目の Fourier 係数を対応させる線型形式を $\alpha_n(\varphi) = a(n)$ で定める。すると上の定理の条件は

$$\sum\nolimits_{m<0} c(m)\alpha_{-m} = 0 \qquad \text{in } S_\kappa^* \tag{6.1}$$

と書ける。$\dim S_\kappa < \infty$ であるから、nearly holomorphic な保型形式のなすベクトル空間 $\{f(\tau)\}$ は無限次元であることに注意する。

7. $\mathbb{H}_l$ 上の有理型保型形式と Heegner 因子

$F(Z)$ を $\mathbb{H}_l$ 上の $\Gamma(L)$ に関するウェイトが r の有理型保型形式とする。F の定める主因子が Heegner 因子の一次結合であると仮定しよう。

$$(F) = \sum_{m<0} c(m)H(m) \tag{7.1}$$

因子の条件から r は決まってしまうが、具体的に書き下すのは少々複雑であるので、[3, Cor. 4.24] を参照していただきたい。

さて、因子の条件において $\{c(m)\}$ は自由に与えることはできないが、実は次が成り立つ。

定理 7.1. $\mathbb{H}_l$ 上のウェイトが r の有理型保型形式であって

$$(F) = \sum_{m<0} c(m)H(m) \tag{7.2}$$

となるものが存在するための必要十分条件は、上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の nearly holomorphic なウェイト $k = 1 - l/2$ の保型形式 $f(\tau)$ であってその主要部が

$$\sum\nolimits_{m<0} c(m)e^{2\pi\sqrt{-1}\,m\tau}$$

となるものが存在することである。

既に述べた定理 6.1 とあわせて、もう一度まとめておくと次のようになる。

$\exists F(Z)$: $\mathbb{H}_l$ 上のウェイト r の有理型保型形式でその因子が $(F) = \sum\nolimits_{m<0} c(m)H(m)$

$\Longleftrightarrow$ $\exists f(\tau)$: $\mathfrak{H}$ 上の nearly holomorphic な保型形式で、

その主要部が $\sum\nolimits_{m<0} c(m)e^{2\pi\sqrt{-1}\,m\tau}$

$\Longleftrightarrow$ $f(\tau) = \sum\nolimits_{m<0} c(m)F_m(\tau, 1-k/2)$ が $\mathfrak{H}$ 上の nearly holomorphic な保型形式

$\Longleftrightarrow$ $\sum\nolimits_{m<0} c(m)\alpha_{-m} = 0 \quad \text{in } S_\kappa^*, \kappa = 2-k = 1+l/2$

このような有理型保型形式 $F(Z)$ と nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ の theta 積分 $\Phi_f(Z)$ との関係は次の定理で与えられる ([3, Theorem 4.23], 本質的には上の定理 4.7 である)。

定理 7.2. 上の $F(Z)$ に対して、

$$G(Z) = \log(|F(Z)|q(Y)^{r/2}) \qquad Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathbb{H}_l$$

とおくと、次が成り立つ。

(1) Ω を $O(2,l)$ の Casimir 作用素とすると、$\Omega G(Z) = -rl/8$

(2) $G(Z) = -\frac{1}{4}\Phi_f(Z) + (\text{定数})$

8. 表現論的な考察

簡単のため $G = SL_2(\mathbb{R}), \Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ と書く。
nearly holomorphic な保型形式 $f(\tau)$ に対して、$\Gamma\backslash G$ 上の関数を

$$F(g) = f(g \cdot \sqrt{-1})j(g, \sqrt{-1})^{-k} \qquad (g \in G)$$

と決める。このとき、G の右移動で $F(g)$ が生成する $G = SL_2(\mathbb{R})$ の表現は何なのかを Lie 環の微分表現で考えてみる。

そこで

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{-1} & 1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 1 \\ 1 & -\sqrt{-1} \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

で定めると、$\{\boldsymbol{h}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-triple である。$f(\tau)$ $(\tau = x + \sqrt{-1}y)$ がウェイト k の保型関数であれば、簡単な計算により

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}f(\tau) &= kf(\tau) \\
\boldsymbol{e}f(\tau) &= \Big(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)f(\tau) - \sqrt{-1}\,k\frac{1}{y}f(\tau) \\
\boldsymbol{f}f(\tau) &= y^2\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)f(\tau)
\end{aligned}$$

となることがわかる。ただし $\boldsymbol{h}f(\tau)$ はウェイトが k、$\boldsymbol{e}f(\tau)$ はウェイトが $k+2$、$\boldsymbol{f}f(\tau)$ はウェイトが $k-2$ となる。

従って、特に $f(\tau)$ が上半平面 $\mathfrak{H}$ 上で正則ならば、$\boldsymbol{f}f(\tau) = 0$ である。これは $f(\tau)$ から生成された $\mathfrak{sl}_2$ の表現が最低ウェイトが k の最低ウェイト表現であることを意味している。

命題 8.1. $f(\tau) \neq 0$ をウェイトが $k < 0$ の nearly holomorphic な保型形式とする。このとき、$f(\tau)$ から生成される $\mathfrak{sl}_2$ の表現は最低ウェイトが k の Verma 加群である。したがって、その表現の組成因子は次元が $-k+1 = |k|+1$ の有限次元表現 $\mathcal{F}_{-k}$ および最低ウェイトが $-k+2$ の正則離散系列表現 $\mathcal{D}^+_{-k+2}$ である。

Proof. $f(\tau)$ から生成される $\mathfrak{sl}_2$ の表現は、最低ウェイトが k の Verma 加群の商加群であるが、$\boldsymbol{e}^{-k+1}f(\tau) \neq 0$ であれば Verma 加群そのものに一致する。$f(\tau)$ の無限遠点での Fourier 展開を考えると、主要部はゼロでない。したがって $\boldsymbol{e}f(\tau)$ の主要部を考えると、$\boldsymbol{e}f(\tau) \neq 0$ である。これを繰り返して $\boldsymbol{e}^{-k+1}f(\tau) \neq 0$ がわかる。よって $f(\tau)$ が生成するのは Verma 加群であり、これより組成列が特定できる。 □

系 8.2. $f(\tau) \neq 0$ をウェイトが $k < 0$ の nearly holomorphic な保型形式とする。このとき、$\boldsymbol{e}^{-k+1}f(\tau)$ はウェイトが $-k+2$ の nearly holomorphic な保型形式である。

さて Li-Tan-Zhu [4] により、$SL_2(\mathbb{R})$ から $O(p,q)$ への theta 対応が具体的に分かっている。その表 ([4, FIG. 9]) を見ると、$SL_2(\mathbb{R}) \to O(2,l)$ (l : even) という対応の下で、

$$\mathcal{F}_{-k}\ (k = 1 - l/2) \longleftrightarrow \mathcal{F}_{(0,\dots,0)} : \text{自明な表現}$$

と対応していることがわかる。一方、組成列の $\mathcal{D}_{-k+2}$ $(k=1-l/2)$ は theta 対応には現れない。しかし [4] の手法は、まず主系列表現同士の対応を考え、それを解析接続して留数計算をするというものであった。一方正規化された theta 積分 Φ_f の定義では、留数ではなく定数項を取っていたことに注意しよう。実際、既に述べたように留数は定数関数 (つまり自明な表現) になってしまうからである。

もし定数項を取ることにより、離散系列表現 $\mathcal{D}_{-k+2}$ が関わってくるとすれば、$O(2,l)$ の方でも対応する主系列表現の組成列が自然に関係すると思われる。これも表 [4, FIG. 9] に記載されており、自明な表現を除き、対応する主系列は他に 3 つの組成因子を持つことがわかる。そのようなわけで、Φ_f (から生成される $O(2,l)$ の表現) とそれら 3 つの表現との関係について興味があるところではあるが、今のところ筆者には何も分かっていない。

References

[1] Richard E. Borcherds. Automorphic forms on $\mathrm{O}_{s+2,2}(\mathbf{R})$ and infinite products. *Invent. Math.*, 120(1):161–213, 1995.

[2] Richard E. Borcherds. Automorphic forms with singularities on Grassmannians. *Invent. Math.*, 132(3):491–562, 1998.

[3] Jan H. Bruinier. *Borcherds products on O(2, l) and Chern classes of Heegner divisors*, volume 1780 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[4] Jian-Shu Li, Eng-Chye Tan, and Chen-Bo Zhu. Tensor product of degenerate principal series and local theta correspondence. *J. Funct. Anal.*, 186(2):381–431, 2001.

[5] 日本数学会 (編). **数学辞典**. 岩波書店, 第 3 版, 1985.

Kyo Nishiyama, Faculty of IHS, Kyoto University, Sakyo, Kyoto 606-8501, Japan
E-mail address: kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp